

① a) Le rette s ha equazioni parametriche $s \begin{cases} x=t \\ y=1+3t \\ z=-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,
 dunque $P_s = (0, 1, 0) \in s$ e $\vec{v}_s = (1, 3, -2) \parallel s$.

Analogamente $P_r = (0, 1, 2) \in r$ e $\vec{v}_r = (3, -1, 1) \parallel r$.

Ora le rette r e s sono sghembe se e solo se i tre vettori

$\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overline{P_r P_s}$ non sono complanari, e ciò è vero poiché

il prodotto misto $\overline{P_r P_s} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = -2(9+1) = -20$
 è non nullo.

La distanza tra r ed s è dunque data da

$$d(r, s) = \frac{|\overline{P_r P_s} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{20}{|(-1, 7, 10)|} = \frac{20}{\sqrt{150}} = \frac{2^2 \cdot 5}{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2}} = \underline{\underline{2\sqrt{2/3}}}$$

b) Poiché il piano π per s è parallelo ad r , la retta r' ha la
stessa direzione di r . Per determinare un punto P' di r' , scriviamo
 dopprima equazioni parametriche per la retta h normale a π e
 passante per P_r . Ora π avrà equazione della forma
 $\lambda(x-y-z+1) + \mu(2x+z) = (\lambda+2\mu)x - \lambda y + (\mu-\lambda)z + \lambda = 0$
 ove $\vec{m}_\pi = (\lambda+2\mu, -\lambda, \mu-\lambda)$ è normale a $\vec{v}_r$. Risulta perciò
 $\vec{m}_\pi \cdot \vec{v}_r = 3(\lambda+2\mu) - \lambda + \mu - \lambda = 3\lambda + 7\mu = 0$, con cui si ottiene
 una possibile scelta $\lambda=7, \mu=-3$ che fornisce l'equazione

$$\boxed{\pi: x - 7y - 10z + 7 = 0}$$

Con le rette h ha equazioni parametriche $h \begin{cases} x=u \\ y=1-7u \\ z=2-10u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$
 ed incontrando π per una opportuna u_0 soddisfacente la
 condizione $u_0 - 7(1-7u_0) - 10(2-10u_0) + 7 = 0$, con $u_0 = 2/15$

Il punto P' di r' cercato si trova dunque su h raddoppiando la
 origine u_0 , con per $u = 4/15$. Quindi $P' = \left(\frac{4}{15}, -\frac{13}{15}, -\frac{2}{3}\right)$ ed

infine $r' \begin{cases} x = \frac{4}{15} + 3t \\ y = -\frac{13}{15} - t \\ z = -\frac{2}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

② a) Se $f = ne^y$ allora $\frac{\partial f}{\partial n} = e^y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = ne^y$.

In particolare f ha derivate parziali prime continue in $\mathbb{R}^2$, perciò f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Dunque il suo grafico ha piano tangente in ogni suo punto.

b) Il piano tangente al grafico di f in P ha pendenza data dal vettore $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial n}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), -1 \right)$; perciò esso è parallelo ad π (che ha direzione data da $\vec{v}_\pi = (1, -1, 0)$) se e solo se $\vec{n} \perp \vec{v}_\pi$ cioè se e solo se $\vec{n} \cdot \vec{v}_\pi = \frac{\partial f}{\partial n}(P) - \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.
Si ottiene quindi la condizione $e^y(1-n) = 0$ che è soddisfatta se e solo se $n=1$. Il luogo geometrico cercato è dunque le rette del piano xy di equazione $n=1$.

③ D è la palla chiusa del piano di centro $C = (-2, 2)$ e raggio 2. Inoltre f è di classe C^∞ . Determiniamo dapprima gli eventuali punti critici interni: $\nabla f = 2(n+1, y-1)$, perciò $\nabla f(P) = 0 \Rightarrow P = P_0 = (-1, 1)$ che è interno a D .
Risulta $f(P_0) = 0$.

Ricordiamo ora gli eventuali estremi di f sulle frontiere ∂D .

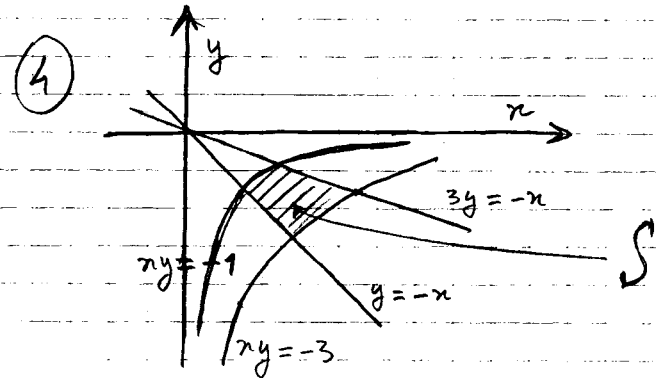
Il metodo di Lagrange fornisce le condizioni

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} n+1 & y-1 \\ n+2 & y-2 \end{pmatrix} = 0 \\ (n+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+y=0 \\ (n+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -n \\ 2(n+2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -n \\ |n+2| = \sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} P_1 = (-2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}) \\ P_2 = (-2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}) \end{cases}$$

Risulta $f(P_1) = 6+4\sqrt{2}$, $f(P_2) = 6-4\sqrt{2}$.

Perciò P_0 è punto di $\min(f) = 0$ e P_1 è punto di $\max(f) = 6+4\sqrt{2}$.



(*) Posto $u = xy$ e $v = x/y$
 Si trasforma nel quadrato

$$S' = \{(u, v) \mid -3 \leq u \leq -1, -3 \leq v \leq -1\}$$

la trasformazione (*) è invertibile nel quadrante $x > 0, y < 0$.

In effetti $uv = x^2$ e $u/v = y^2$ da cui ricaviamo la trasformazione

inversa (**): $x = \sqrt{uv}$, $y = -\sqrt{u/v}$ - la trasformazione (*) ha

Jacobiano $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix} \right| = |-2x/y| = 2x/y = 2v.$

Abbiamo dunque $\iint_S \frac{x^3}{y} dx dy = \iint_{S'} uv^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv =$

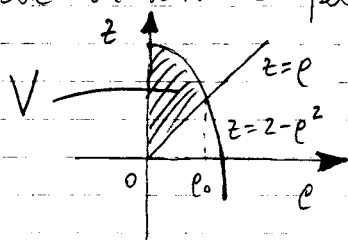
$$= \iint_{S'} uv^2 \frac{1}{2v} du dv, \text{ essendo che } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}.$$

L'integrale diventa quindi $= \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} u du \int_{-3}^{-1} v dv = \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-3}^{-1} \left[\frac{v^2}{2} \right]_{-3}^{-1} =$

$$= \frac{1}{8} (1-9)(1-9) = \underline{\underline{8}}$$

5 In coordinate cilindriche (ρ, θ, z) la regione dello spazio descritta avviene $V = \{(\rho, \theta, z) \mid \rho < z < 2-\rho^2, \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]\}$

che in sezione per $\theta = \text{cost.}$ avviene le figure tratteggiate



ove ρ_0 soddisfa alla $2-\rho^2 = \rho$ cioè $\rho^2 + \rho - 2 = 0$

e dunque $\rho_0 = \frac{-1+\sqrt{1+8}}{2} = 1$

la nostra integrale vale dunque $\iiint_V (2z-\rho) \rho d\rho d\theta dz =$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho}^{2-\rho^2} (2z-\rho) dz = 2\pi \int_0^1 \left[z^2 - \rho z^2 \right]_{\rho}^{2-\rho^2} d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (\rho^5 + \rho^4 - 4\rho^3 - 2\rho^2 + 4\rho) d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - 1 - \frac{2}{3} + 2 \right] = \underline{\underline{\frac{7}{5}\pi}}$$

6) Posto $a_n = \ln n$ e $b_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$, la serie è data da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n ; \quad \text{Ove } a_n \text{ è infinita e } b_n \text{ è infinitesimo di}$$

ordine 2, infatti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{(1/n)^2} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos n}{n^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n}{2n} = \frac{1}{2}$

Perché, come è noto, a_n è infinita di ordine minore di ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, otteniamo che $a_n b_n$ è infinitesimo di ordine (< 2 ma) certamente maggiore di $3/2$, infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n b_n}{(1/n)^{3/2}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^{1/2}} \cdot \frac{b_n}{(1/n)^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \stackrel{(H)}{=} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1/2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

Dunque la serie in oggetto converge per il criterio del conf. integ.